

课程: 6.1 定积分概念与微积分基本公式

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											
阅卷人											

考生注意: 答题时应注明题号, 并按题号顺序答题。

题号	6.1节 P107	答 题 内 容	廖国勇
一 1	设 $f(x) = \int_0^{x^2} \cos \sqrt{t} dt$, 则 $f'(x) = (\cos \sqrt{x^2}) \cdot 2x = 2x \cos x$ $(\cos x = \cos x)$		
2	极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \frac{\sin t}{t} dt}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin x}{x}}{1} = 2$		
3	定积分 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sec^2 x - 1) dx = (\tan x - x) \Big _0^{\frac{\pi}{4}} = 1 - \frac{\pi}{4}$		
4	曲线 $y = \int_x^1 t e^{-t} dt$ 的拐点为 ____ 解: $y' = -x e^{-x}$ $y'' = -e^{-x} + x e^{-x} = e^{-x}(x-1)$ 令 $y'' = 0 \Rightarrow x = 1$, $y''' = -e^{-x}(x-1) + e^{-x} = e^{-x}(2-x)$ $y'''(1) = e^{-1}(2-1) = e^{-1} \neq 0$, 故 $(1, y(1)) = (1, 0)$ 为拐点		
二 1	设 $F(x) = \int_0^x (x^2 - t^2) f(t) dt$, 求 $F''(x)$ 解: $F(x) = x^2 \int_0^x f(t) dt - \int_0^x t^2 f(t) dt$ $F'(x) = 2x \int_0^x f(t) dt + x^2 f(x) - x^2 f(x) = 2x \int_0^x f(t) dt$ $F''(x) = 2 \int_0^x f(t) dt + 2x f(x)$		

二 2 设 $\int_0^x f(t^2) dt = 2x^3$, 求 $\int_0^1 f(x) dx$

解: ~~$\int_0^x f(t^2) dt = 2x^3$ 两边同时对 x 求导, $f'(x^2) = 6x^2$~~

即 ~~$f'(u) = 6u \Rightarrow f(u) = \int f'(u) du = \int 6u du = 3u^2 + C$, 于是~~

~~$$\int_0^x f(t^2) dt = \int_0^x$$~~

解: $\int_0^x f(t^2) dt = 2x^3$ 两边同时对 x 求导, 得 $f(x^2) = 6x^2$

于是, $\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 6x dx = 3x^2 \Big|_0^1 = 3$

P108

3 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x (1 - e^{-t^2}) dt}{x \sin^2 x}$

解: 原式 = $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x (1 - e^{-t^2}) dt}{x \cdot x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-x^2}}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2xe^{-x^2}}{6x} = \frac{1}{3}$

~~原式 = $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x (1 - e^{-t^2}) dt}{x \sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-x^2}}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2xe^{-x^2}}{6x} = \frac{1}{3}$~~

4 设函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{\int_0^x \ln(\cos t) dt}{x^3} & x \neq 0 \\ A & x = 0 \end{cases}$ 在点 $x=0$ 连续, 求常数 A

解: $A = f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \ln(\cos t) dt}{\frac{1}{3}x^3}$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x (-\sin x)}{6x} = -\frac{1}{6}$

5 设 $f(x) = \begin{cases} x, & x < 1 \\ x^2, & x \geq 1 \end{cases}$, 求 $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ 的表达式

解: 方法一, $F(x) = \int_0^x f(t) dt = \begin{cases} \int_0^x t dt & x < 1 \\ \int_0^1 t dt + \int_1^x t^2 dt & x \geq 1 \end{cases}$
 $= \begin{cases} \frac{x^2}{2} & x < 1 \\ \frac{x^3}{3} + \frac{1}{6} & x \geq 1 \end{cases}$

方法二. $f(x) = \begin{cases} x & x < 1 \\ x^2 & x \geq 1 \end{cases} \Rightarrow F(x) = \begin{cases} \int x dx & x < 1 \\ \int x^2 dx & x \geq 1 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 + C_1, & x < 1 \\ \frac{1}{3}x^3 + C_2, & x \geq 1 \end{cases}$

由 $F(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0$ 由 $\lim_{x \rightarrow 1^-} F(x) = F(1) \Rightarrow C_2 = \frac{1}{6}$

所以 $F(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} & x < 1 \\ \frac{x^3}{3} + \frac{1}{6} & x \geq 1 \end{cases}$

($F'(x) = f(x)$), $F(x) = \int f(x) dx$

题号	答 题 内 容	廖国勇
6.1节 P109		
二 6	设 $f(x) = \frac{1}{1+x} + x \int_0^1 f(x) dx$, 求 $\int_0^1 f(x) dx$ 解: 设 $\int_0^1 f(x) dx = A$, 则 $f(x) = \frac{1}{1+x} + Ax$, 则 $\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{1+x} + Ax \right) dx = \left[\ln(1+x) + \frac{A}{2} x^2 \right]_0^1$ $= \ln 2 + \frac{A}{2} = A$ $\Rightarrow A = 2 \ln 2$	
7	求不定积分 $\int_0^{\pi} \sqrt{1 - \sin x} dx$ 解 $\int_0^{\pi} \sqrt{1 - \sin x} dx = \int_0^{\pi} \sqrt{\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2} - 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} dx$ $= \int_0^{\pi} \sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2} dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2} dx$ $= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2}) dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2}) dx$ $= 2(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}) \Big _0^{\frac{\pi}{2}} + (-2)(-\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2}) \Big _{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$ $= 2(\sqrt{2} - 1) + 2(\sqrt{2} - 1) = 4(\sqrt{2} - 1)$	
8	求定积分 $\int_0^{\ln 2} e^x (1 + e^x)^3 dx$ 解: 原式 $= \int_0^{\ln 2} (1 + e^x)^3 d(1 + e^x)$ $= \frac{1}{4} (1 + e^x)^4 \Big _0^{\ln 2}$ $= \frac{1}{4} (1 + e^{\ln 2})^4 - \frac{1}{4} (1 + e^0)^4$ $= \frac{81}{4} - \frac{16}{4} = \frac{65}{4}$	
P110		
9	求定积分 $\int_0^{\pi} (1 - \sin^3 x) dx$ 解: 原式 $= \int_0^{\pi} dx + \int_0^{\pi} (1 - \cos^2 x) d \cos x$ $= \pi + (\cos x - \frac{1}{3} \cos^3 x) \Big _0^{\pi}$ $= \pi + (-1 + \frac{1}{3}) - (1 - \frac{1}{3})$ $= \pi - \frac{4}{3}$	

二 10

求定积分 $\int_0^2 \max\{x, x^2\} dx$

$$\begin{aligned}
 \text{解: 原式} &= \int_0^1 \max\{x, x^2\} dx + \int_1^2 \max\{x, x^2\} dx \\
 &= \int_0^1 x dx + \int_1^2 x^2 dx \\
 &= \frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{11}{6}
 \end{aligned}$$

11 求不定积分 $\int_1^3 (|x-2| + |\cos x|) dx$

$$\begin{aligned}
 \text{解: 原式} &= \int_1^3 |x-2| dx + \int_1^3 |\cos x| dx \\
 &= \int_1^2 (2-x) dx + \int_2^3 (x-2) dx + \int_1^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^3 -\cos x dx \\
 &= (2x - \frac{x^2}{2}) \Big|_1^2 + (\frac{x^2}{2} - 2x) \Big|_2^3 + (\sin x) \Big|_1^{\frac{\pi}{2}} + (-\sin x) \Big|_{\frac{\pi}{2}}^3 \\
 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + (1 - \sin 1) + (1 - \sin 3) \\
 &= 3 - \sin 1 - \sin 3
 \end{aligned}$$

P111

12 求函数 $f(x) = \int_0^x (t+1) \arctan t dt$ 的极小值.

$$\text{解: } f'(x) = (x+1) \arctan x \quad f''(x) = \arctan x + \frac{x+1}{1+x^2}$$

$$\text{令 } f'(x) = 0 \Rightarrow x=0 \text{ 或 } x=-1$$

$x=0$ 时, $f''(0) = 1 > 0$, $f(x)$ 在 $x=0$ 处取极小值, $f(0) = 0$

$x=-1$ 时, $f''(-1) = -\frac{\pi}{4} < 0$, $f(x)$ 在 $x=-1$ 处取极大值.

13 求定积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin x - \sin^3 x} dx$

$$\begin{aligned}
 \text{解: 原式} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin x} \sqrt{1 - \sin^2 x} dx \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin x} \cos x dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sqrt{\sin x} (-\cos x) dx \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin x} d \sin x + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} -\sqrt{\sin x} d \sin x \\
 &= \frac{2}{3} \sin^{\frac{3}{2}} x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (-1) \frac{2}{3} \sin^{\frac{3}{2}} x \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \\
 &= \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{4}{3}
 \end{aligned}$$

题号	6.1节 P _{III}	答 题 内 容	廖国勇
二 4	设 $f(x) = \begin{cases} x+1, & x \leq 0 \\ \frac{1}{1+x}, & x > 0 \end{cases}$, 求 $\int_{-1}^1 f(x) dx$	解: $\int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^0 f(x) dx + \int_0^1 f(x) dx$ $= \int_{-1}^0 (x+1) dx + \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx$ $= \frac{1}{2} + \ln 2$	
三 1	证明题 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导, 且满足条件 $f(1) = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} x f(x) dx$ 证明: 至少存在一点 $\xi \in (0,1)$, 使得 $f(\xi) + \xi f'(\xi) = 0$ 证明: 设 $F(x) = x f(x)$, 显然 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导, $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续. 由积分中值定理 $2 \int_0^{\frac{1}{2}} x f(x) dx = 2 \cdot (\frac{1}{2} - 0) \eta \cdot f(\eta)$ $= \eta \cdot f(\eta) = F(\eta)$ 这里 $\eta \in (0, \frac{1}{2})$ 又 $f(1) = 1 \cdot f(1) = F(1)$ 所以 $F(\eta) = F(1)$ 由罗尔定理知, $\exists \xi \in (\eta, 1) \subset (0,1)$ 有 $F'(\xi) = 0$ 即 $f(\xi) + \xi f'(\xi) = 0$ 注 要证存在一点 $\xi \in (0,1)$, 使得 $f(\xi) + \xi f'(\xi) = 0$ 只要函数 $g(x) = f(x) + x f'(x)$ 有一个零点. 如是有两种思路 1. 对 $g(x)$ 用介值定理 (或零点定理) 2. 对 $\int g(x) dx$ 用罗尔定理 就本题而言, $\int g(x) dx = \int [f(x) + x f'(x)] dx$ $= \int f(x) dx + \int x df(x)$ $= x f(x) + C$ C 取 0, 最为简单		

题号

6.1节 P112

三 2 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导且 $\int_0^1 x f(x) dx = 0$, 证明: 至少存在一点 $c \in (0,1)$, 使得 $c^2 f'(c) = f(1)$

$$\begin{aligned} \text{证明: } 0 &= \int_0^1 x f(x) dx = \int_0^1 f(x) d\left(\frac{x^2}{2}\right) \\ &= \left. \frac{x^2}{2} f(x) \right|_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{2} f'(x) dx \\ &= \frac{1}{2} f(1) - \frac{1}{2} \int_0^1 x^2 f'(x) dx \\ &= \frac{1}{2} f(1) - \frac{1}{2} (1-0) \cdot c^2 f'(c) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f(1) = c^2 f'(c)$$

注 1. 若 $f(x)$ 连续, 则积分中值定理为

$$\int_a^b f(x) dx = f(\xi) (b-a) \quad \xi \in (a,b)$$

2. $x^2 f'(x)$ 不一定连续, 这里利用的是导数中值定理, 也就是达布定理.

3. 达布定理: 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导, 且 $\exists x_1 \in [a,b]$, $x_2 \in [a,b]$, $f'(x_1) = A$, $f'(x_2) = B$, $A < B$, 则对于任意的 $C \in [A, B]$, 一定存在 $x_3 \in [a,b]$, 使得 $f'(x_3) = C$

4. 若 $F(x) = \int_0^x t^2 f'(t) dt$, 则 $F'(x) = x^2 f'(x)$

$$\int x^2 f'(x) dx = \int x^2 df(x) = x^2 f(x) - \int 2x f(x) dx$$

即 $x^2 f'(x)$ 是 $x^2 f(x) - \int 2x f(x) dx$ 的导函数

题号	答 题 内 容	廖国勇
----	---------	-----

三 3 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 且 $f(x) < 1$, 证明: 方程 $2x - \int_0^x f(t) dt = 1$ 在 $(0,1)$ 内只有一个实根.

证明: 设 $F(x) = 2x - \int_0^x f(t) dt - 1$, 显然 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导, 当然在 $[0,1]$ 上连续

$$F(0) = 2 \times 0 - \int_0^0 f(t) dt - 1 = -1 < 0$$

$$F(1) = 2 \times 1 - \int_0^1 f(t) dt - 1 = 1 - \int_0^1 f(t) dt$$

$$= 1 - (1-0)f(\xi) \quad \xi \in (0,1)$$

$$= 1 - f(\xi) > 0$$

由零点定理, $\exists \eta \in (0,1)$, 使得 $F(\eta) = 0$, 即方程

$2x - \int_0^x f(t) dt = 1$ 在 $(0,1)$ 内有一个实根

又 $F'(x) = 2 - f(x) > 0$, 即 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递增.

综上所述, 方程 $2x - \int_0^x f(t) dt = 1$ 在 $(0,1)$ 内只有一个实根.